Présentation des tenseurs

Tanguy DUSSERRE

February 20, 2022

Il est possible que malgré mes efforts, je n'arrive pas à être suffisamment clair ; mais je vais faire de mon mieux pour que l'utilisation des tenseurs soit compréhensible durant la suite du cours.
On parle généralement des tenseurs comme la généralisation des vecteurs. Cette formule préfaite indique souvent mal l'idée derrière l'objet en question. Revenons donc un instant aux particularités d'un vecteur :

- C'est un objet appartenant à un espace vectoriel
- On peut faire des transformations linéaires entre plusieurs vecteurs et on obtiendra de nouveau un vecteur
- Quel que soit le système de coordonnées choisi, les équations écrites sous forme vectorielle ne changent pas

On se doute dès lors qu'une transformation linéaire entre deux tenseurs donnera toujours un tenseur et que les équations tensorielles sont invariantes par changement de système de coordonnées. Ce dernier point est leur principal atout, car ils permettent de synthétiser bon nombre de relations.
De la même manière qu'on utilise des champs scalaires et des champs vectoriels, on va également faire intervenir des champs tensoriels.
Il est nécessaire pour la suite de rappeler la définition des formes linéaires et de l'espace dual :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une forme linéaire sur E est une application linéaire qui va de E dans $\mathbb{K}$, autrement dit qui renvoie un scalaire.

Pour un espace vectoriel E, on note E^* son espace dual, c'est-à-dire l'espace vectoriel des formes linéaires sur E.

Une propriété importante : la dualité est une involution ($E^{**} = E$).

Maintenant qu'on a une idée du type d'objet que l'on cherche, posons la définition d'un tenseur. On se donne un espace vectoriel E de dimension finie.

Un tenseur est une application multilinéaire T de la forme suivante :

$$T : \underbrace{E^* \times \cdots \times E^*}_{n \text{ fois}} \times \underbrace{E \times \cdots \times E}_{p \text{ fois}} \to \mathbb{K}$$

Un tel tenseur est dit d'ordre (n, p).
Sa définition en tant qu'application est une simple astuce mathématique. Effectivement, l'objet ne variera pas par changement de coordonnées et une combinaison linéaire de tenseurs est encore un tenseur (on peut montrer que l'ensemble des tenseurs de même ordre est un espace vectoriel). En revanche, il est possible d'utiliser une particularité des applications multilinéaires : elles sont entièrement définies par les valeurs qu'elles prennent sur les vecteurs d'une base. Par exemple, pour connaître entièrement une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, il suffit de connaître les images des vecteurs d'une base. Cela repose sur la linéarité (cf le cours d'algèbre linéaire de L2 pour de plus amples détails).

Prenons maintenant une base de E et la base duale de E^* associée. Si l'on évalue T pour toutes les combinaisons possibles de vecteurs, on obtiendra np scalaires. **Ces np scalaires sont les coefficients du tenseur**. On les écrit généralement $T^{abc\cdots}_{\alpha\beta\gamma\cdots}$.

- Les indices supérieurs repèrent la position dans les termes en E^* et sont dits **covariants**
- Les indices inférieurs repèrent la position dans les termes en E et sont dits **contravariants**

En quoi un tel objet barbare est-il une généralisation des vecteurs ? Prenons un tenseur d'ordre $(1,0)$; il s'agit d'une application $E^* \to \mathbb{K}$, autrement dit il s'agit d'une forme linéaire de E^*. C'est donc un vecteur de l'espace dual de E^*. Or $E^{**} = E$: **un tenseur d'ordre $(1,0)$ est un vecteur de E.**

Un autre exemple qui sera primordial pour la suite : on dit souvent qu'un tenseur d'ordre $(0,2)$ est une matrice. C'est un beau raccourci, mais effectivement penser ces tenseurs comme des matrices carrées simplifie largement la compréhension.
Un tel tenseur est, selon notre définition, une application $T : E \ \times E \to \mathbb{K}$, soit une forme bilinéaire (un exemple classique de ce type d'application est le produit scalaire). Les coefficients de ce tenseur sont donc les $T(\overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{e_j})$ pour une base $(e_i)_{1\leq i\leq dimE}$ de E. On les note plus généralement T_{ij}. Il est alors envisageable d'écrire le tenseur comme la matrice de ces coefficients, i repérant les lignes et j les colonnes. Pour l'instant, cette notation semble sortir de nulle part ; pour qu'elle prenne son sens, il faut introduire le produit tensoriel.

Il existe un autre type d'opérations que les sommations et les multiplications par un scalaire qui fait tout l'intérêt des tenseurs : on peut définir deux types de produits de 2 tenseurs (et de n tenseurs par extension, bien que cela nous intéresse peu ici). Soient deux tenseurs A et B d'ordres respectifs (n_A, p_A) et (n_B, p_B).

Produit tensoriel
Le produit tensoriel $A \otimes B$ est tout simplement le produit des deux applications A et B (on rappelle que cela a du sens car elles renvoient des scalaires). $A\otimes B$ est d'ordre $(n_A + n_B, p_A + p_B)$ et ses $(dimE)^{n_A+n_B+p_A+p_B}$ coefficients sont tout simplement tous les produits possibles entre un coefficient de A et un coefficient de B.
Un exemple pour illustrer cette abstraction : on peut utiliser le produit tensoriel pour fabriquer un tenseur d'ordre $(2,0)$ à partir de 2 vecteurs $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{x} \otimes \overrightarrow{y}$ a 9 coefficients : $(x_i y_j)_{1\leq i,j\leq 3}$.

Produit contracté
L'idée est de "lier" un indice covariant d'un tenseur avec un indice contravariant de l'autre.
Un produit contracté est un tenseur d'ordre $(n_A + n_B - 1, p_A + p_B - 1)$. On multiplie toujours les applications A et B, mais cette fois on a "bloqué" un indice de chaque.
Rigoureusement, on impose d'évaluer l'application sur chacun des vecteurs de la base pour ces indices, puis de sommer tous les résultats obtenus : en notant C un produit contracté de A et B, cela donne :

$$C : \left| \begin{array}{l} \overbrace{E^* \times \cdots \times E^*}^{n_A+n_B-1 \text{ fois}} \times \overbrace{E \times \cdots \times E}^{p_A+p_B-1 \text{ fois}} \to \mathbb{K} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{dimE} A(\cdots, e_i^*, \cdots) B(\cdots, e_i, \cdots) \end{array} \right.$$

Les coefficients du produit se notent donc $\displaystyle\sum_{j=1}^{dimE} A^{\mathbf{j}bc\cdots}_{\alpha\beta\gamma} B^{efg\cdots}_{\mathbf{j}\delta\lambda\cdots}$. (si on a contracté le premier indice covariant de A avec le premier indice contravariant de B).
Si un tenseur T d'ordre (n,p) a des indices covariants et contravariants, on peut en identifier un de chaque pour le contracter et obtenir un tenseur T_c d'ordre $(n-1, p-1)$:

$$T_c : \left| \begin{array}{l} \overbrace{E^* \times \cdots \times E^*}^{n-1 \text{ fois}} \times \overbrace{E \times \cdots \times E}^{p-1 \text{ fois}} \to \mathbb{K} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{dimE} T(\cdots, e_i^*, \cdots, e_i, \cdots) \end{array} \right.$$

dont les coefficients sont $\sum_{j=1}^{dimE} T^{\mathbf{j}bc\cdots}_{\mathbf{j}\beta\gamma\cdots}$ (encore une fois si on a contracté les premiers indices covariant et contravariant).

On remarque que la somme apparaît systématiquement lorsqu'un même indice est répété 2 fois. Afin de ne pas encombrer les notations, on introduit la **convention de sommation d'Einstein**, qui veut qu'une répétition d'indice sous-entend une somme sur ce même indice :

$$\boxed{\begin{aligned} T^{ibc\cdots}_{i\beta\gamma\cdots} &= \sum_{i=1}^{n} T^{ibc\cdots}_{i\beta\gamma\cdots} \\ A^{ibc\cdots}_{\alpha\beta\gamma\cdots}B^{efg\cdots}_{i\delta\lambda\cdots} &= \sum_{i=1}^{n} A^{ibc\cdots}_{\alpha\beta\gamma\cdots}B^{efg\cdots}_{i\delta\lambda\cdots} \end{aligned}}$$

Convention de sommation d'Einstein

La convention est bien entendu valable quelle que soit la position des indices. Le produit contracté implique seulement qu'il en faut un covariant et l'autre contravariant.

Pour entrevoir en quoi la représentation matricielle est pertinente, prenons un tenseur T_i^j d'ordre $(1,1)$ sur $\mathbb{R}^3$. Dans la base canonique, ses 9 coefficients sont :

$$\begin{bmatrix} T(e_1^*, e_1) & T(e_2^*, e_2) & T(e_3^*, e_1) \\ T(e_1^*, e_2) & T(e_2^*, e_2) & T(e_3^*, e_2) \\ T(e_1^*, e_3) & T(e_2^*, e_2) & T(e_3^*, e_3) \end{bmatrix}$$

Où pour $1 \leq i \leq 3$, $e_i * (\overrightarrow{x}) = < \overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{x} >$.
Soit $\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + x_3\overrightarrow{e_3}$. Effectuons le produit contracté entre T_i^j et x^l :

$$T_i^j x^i = T(e_1^*, e_j)x_1 + T(e_2^*, e_j)x_2 + T(e_3^*, e_j)x_3$$

"Appliquer" $\overrightarrow{\overrightarrow{T}}$ à $\overrightarrow{x}$ revient donc à faire une transformation linéaire de $\overrightarrow{x}$: $\overrightarrow{\overrightarrow{T}}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qu'on représente dans la base canonique par la matrice plus haut.

Nous sommes à présent suffisamment armés pour entrevoir le potentiel des tenseurs. Des champs tensoriels sont définis sur l'espace, et il est possible de faire des produits entre les tenseurs de ces différents champs pour obtenir des relations. Pour nous convaincre que cela est véritablement utile, revenons à la mécanique des fluides.

Supposons que la jacobienne de la vitesse en $\overrightarrow{r}$ soit un tenseur d'ordre (1,1). Pour simplifier, notons-le $\overrightarrow{\overrightarrow{G}}$. Ses coefficients sont $(\partial_i v^j)_{1\leq i,j\leq 3}$ où ∂_i représente la dérivée selon la $i^{\text{ème}}$ coordonnée. Observons le produit tensoriel contracté entre $\overrightarrow{\overrightarrow{G}}$ et $\overrightarrow{h}$: il donne un tenseur d'ordre $(1+1-1, 1-1) = (1,0)$, soit un vecteur... Dont les coefficients sont $(\partial_i v^j h^i)_{1\leq j\leq 3}$ (nous utilisons ici la convention de sommation d'Einstein sur i). De façon plus classique, nous obtenons le vecteur suivant :

$$\overrightarrow{\overrightarrow{G}}.\overrightarrow{h} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x}h_x + \frac{\partial v_x}{\partial y}h_y + \frac{\partial v_x}{\partial z}h_z \\ \frac{\partial v_y}{\partial x}h_x + \frac{\partial v_y}{\partial y}h_y + \frac{\partial v_y}{\partial z}h_z \\ \frac{\partial v_z}{\partial x}h_x + \frac{\partial v_z}{\partial y}h_y + \frac{\partial v_z}{\partial z}h_z \end{pmatrix}$$

Effectuons le produit matriciel entre $J_{\overrightarrow{v}}(\overrightarrow{r})$ et la matrice représentative de $\overrightarrow{h}$ en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} h_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} h_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} h_z \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} h_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} h_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} h_z \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} h_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} h_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} h_z \end{bmatrix}$$

Le formalisme tensoriel permet donc de retrouver les mêmes résultats que le calcul matriciel, mais sans avoir à systématiquement se placer dans un système de coordonnées particulier !
On adopte donc régulièrement une notation matricielle pour des tenseurs dits d'ordre 2. Il arrive souvent qu'en abus de notation, on positionne les deux indices en bas même si l'un est contravariant. On définit logiquement :

- $\overrightarrow{\overrightarrow{T}}$ est symétrique si $T_{ij} = T_{ji}$
- $\overrightarrow{\overrightarrow{T}}$ est antisymétrique si $T_{ij} = -T_{ji}$
- Les éléments diagonaux de $\overrightarrow{\overrightarrow{T}}$ sont les éléments T_{ii}
- La trace de $\overrightarrow{\overrightarrow{T}}$ est la somme de ses éléments diagonaux : $tr(\overrightarrow{\overrightarrow{T}}) = T_{ii}$ en utilisant la convention de sommation d'Einstein. Remarquons que la trace d'un tenseur d'ordre $(1,1)$ est donc sa contraction.